LEKCIJE IZ MATEMATIKE 2

Ivica Gusić

Lekcija 2

Primjena neodređenog integrala u inženjerstvu - neke važne diferencijalne jednadžbe

Lekcije iz Matematike 2.

2. Primjena neodredjenog integrala u inženjerstvu - neke važne diferencijalne jednadžbe.

I. Naslov i objašnjenje naslova

U lekciji se primjerima pokazuje važnost nedredjenog integrala u primjenama:
1. Odredjuje se jednadžba radioaktivnog raspada.
2. Odredjuje se jednadžba hladjenja (odnosno zagrijavanja) tijela.
3. Odredjuje se jednadžba gibanja tijela po pravcu pri djelovanju konstantne sile.

II. Pripadni inženjerski odnosno matematički problem

Vidjeli smo da se derivacijom teoretski opisuju i kontroliraju najvažnija fizikalna svojstva: brzina promjene, rast, pad i prijelaz s jednog na drugi (lokalni ekstremi) ubrzani i usporeni rast i pad, prijelaz s ubrzanje na usporenje i obratno (točke infleksije) itd. Medjutim, sve to ide uz uvjet da poznajemo pravilo (funkciju) prema kojemu se proces odvija (položaj točke koja se giba po pravcu u ovisnosti o vremenu, vrijednost jedne veličine u procesu u ovisnosti o promjeni druge veličine itd.).
Nažalost, u stvarnosti, obično ne poznajemo izravno jednadžbu (pravilo) prema kojoj se neki proces odvija, a to nas najviše zanima. Češće možemo, točno ili približno, opisati brzinu kojom se proces odvija, silu koja uvjetuje gibanje i sl. Vidjet ćemo kako se tada, koristeći se integralom i pojmom diferencijalne jednadžbe, može barem načelno riješiti problem odredjivanja pravila odvijanja procesa.

III. Potrebno predznanje

Potrebno je poznavati:
1. Činjenicu da ako su dvije veličine x, y povezane relacijom $y = f(x)$, onda se brzina promjene veličine y s obzirom na promjenu veličine x opisuje derivacijom $f'(x)$ funkcije f po x, tj. s $\frac{df}{dx}$; što se se zapisuje kratko i kao y', odnosno $\frac{dy}{dx}$.
Kraće:
Brzina $v(x)$ od y (s obzirom na x) $= y'(x) = \frac{dy}{dx} = f'(x) = \frac{df}{dx}$
(tu su navedene različite oznake).
Takodjer, da se tada akceleracija promjene opisuje drugom derivacijom funkcije

f po x. Kraće:
Akceleracija $a(x)$ **od** y **(s obzirom na** x**)** $= \; y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = f''(x) = \frac{d^2f(x)}{dx^2}$

2. Pojam neodredjenog integrala i vrijednost nekih jednostavnih integrala.

3. Činjenicu da je $\frac{dy}{dx} \approx \frac{\Delta y}{\Delta x}$

4. Činjenicu da je akceleracija proporcionalna sili, a da je koeficijent proporcionalnosti masa (jedan od Newtonovih zakona).

IV. Nove definicije i tvrdnje s primjerima

Pojam diferencijalne jednadžbe.

Već smo vidjeli da se brzina (čestice koja se giba po pravcu) dobije iz jednadžbe gibanja deriviranjem (to se kraće izražava malo nepreciznom rečenicom:
brzina je derivacija puta po vremenu).
Naime, tu se ne derivira funkcija koja opisuje prijedjeni put u vremenu, već funkcija koja opisuje **položaj** čestice što se giba.
Obratan je problem:
Možemo li, barem teoretski, rekonstruirati gibanje čestice (tj. položaj u svakom trenutku t**), ako znademo brzinu (u svakom trenutku** t**)?**
Odgovor je *možemo*, pod uvjetom da znademo položaj čestice u nekom (jednom konkretnom) trenutku t_0. Naime, označimo:
1. $y(t)$ - položaj u trenutku t čestice koja se giba po y-osi (ako nema zabune, pišemo samo y).
2. $v(t)$ - brzina u trenutku t te čestice (ako nema zabune, pišemo v).
Tada je $v(t) = y'(t)$, tj. $v(t) = \frac{dy(t)}{dt}$ ili, kraće: $v = y'$, tj. $v = \frac{dy}{dt}$
Dakle $y(t) = \int v(t)dt$ ili, kraće $y = \int vdt$.
Kako znamo, rješenje je skup primitivnih funkcija ovisnih o konstanti C, koju ćemo znati odrediti budemo li znali položaj u nekom trenutku t_0, tj. vrijednost $y(t_0)$. Zaključak:
Rekonstrukcija gibanja iz brzine:

$$y'(t) = v(t), \; y(t_0) = y_0$$

Tu se $y' = v$ zove **diferencijalna jednadžba gibanja**, a $y(t_0) = y_0$ **početni uvjet**.
Problem odredjivanja funkcije $y(t)$ ako su poznati $v(t)$ i y_0 zove se Cauchy-ev problem.
Analogan pristup vrijedi za svake dvije zavisne veličine u nekom procesu.

Primjer 1. Riješimo Cauchy-ev problem $y' = 2x : \; y(0) = 1$:

$y = \int 2xdx = x^2 + C$. Iz $y(0) = 1$, dobijemo $1 = 0^2 + C$, tj. $C = 1$. Rješenje je $y = x^2 + 1$.

Opis radioaktivnog raspada - diferencijalna jednadžba radioaktivnog raspada

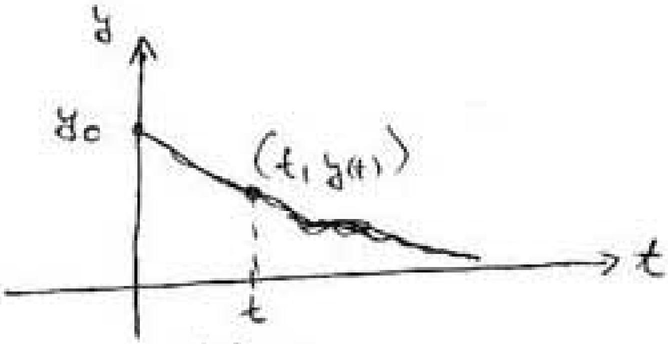
Neka je:

1. t vrijeme
2. $y(t)$ količina radioaktivne materije (na primjer $(C-14)$), u trenutku t
3. $y_0 := y(0)$ količina radioaktivne materije u početku (za $t = 0$).

Problem opisa radioaktivnog raspada jest problem odredjivanja $y(t)$ u ovisnosti o t.

Ograničit ćemo se na raspad u izoliranim uvjetima. S problemom se upoznajemo pokusom; glavna je poteškoća (na primjer s teškim elementima kao što je $C-14$), što se vrlo sporo raspada pa je teško doći do podataka u širokoj vremenskoj skali. Zato treba naći metodu koja će iz **lokalnih** rezultata dati **globalne**.

Intuitivno je jasno da je $y(t)$ neka padajuća funkcija (sl.1.).



Sl. 1

1. korak - Eksperimentalno odredjivanje diferencijalne jednadžbe raspada. Intuitivno je jasno, a potvrdjuje se pokusom, da je količina raspadnute materije, izmedju dvaju relativno bliskih mjerenja u vremenima t i $t+\Delta t$, približno proporcionalna proteklom vremenu Δt i količini $y(t)$ materije u vremenu t. Dakle, postoji pozitivna konstanta k (ovisna samo o vrsti radioaktivne materije, a ne i o vremenu), tako da bude:

$$\Delta y \approx -ky(t)\Delta t$$

Naime, količina raspadnute materije je

$$y(t) - y(t+\Delta t) = -\Delta y$$

(predznak minus je jer se količina smanjuje). Sve se može zapisati i kao:

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} \approx -ky$$

2. korak - Diferencijalna jednadžba raspada

Iz gornje približne jednadžbe naslǔcujemo diferencijalnu jednadžbu raspada (skupa s početnim uvjetom):

$$\frac{dy}{dt} = -ky; \; y(0) = y_0$$

Odavde se može rekonstruirati jednadžba raspada ovako:
$\frac{dy}{y} = -kdt$, pa je $\int \frac{dy}{y} = \int(-kdt)$, tj.

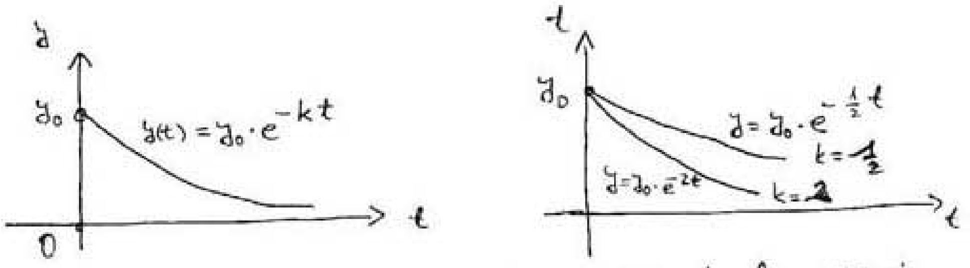
$\ln y = -kt + \ln C$ (tu smo iskoristili da je $y(t) > 0$ za sve t i konstantu smo, napisali kao $\ln C$). Sad je:
$y = e^{\ln C - kt} = e^{\ln C}e^{-kt} = Ce^{-kt}$, a iz uvjeta $y(0) = y_0$, dobijemo $C = y_0$. Konačno, imamo:

$$y = y_0 e^{-kt}$$

što možemo zapisati i kao:

$$y(t) = y(0)e^{-kt}$$

Da bismo raspad opisali do kraja potrebno je znati koeficijent k. Na primjer, za $(C-14)$ je $k = 1.244 \cdot 10^{-4}$ (približno, uz uvjet da se vrijeme mjeri u godinama) (sl.2.).



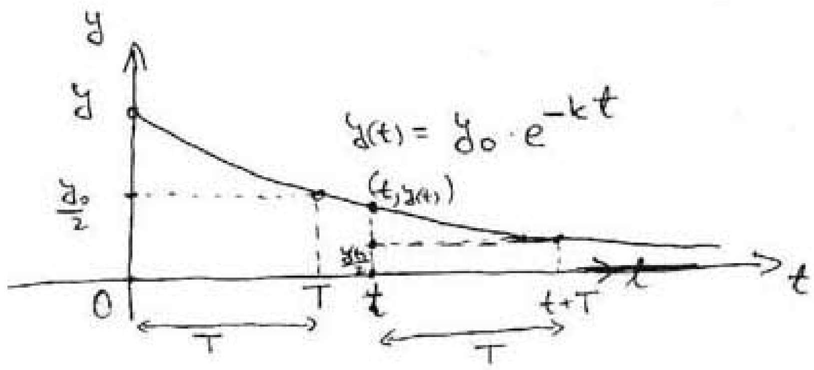
što je k manji
raspadanje je sporije

Sl. 2.

Primjer 2. - vrijeme poluživota. Odredimo vrijeme poluživota radioaktivne materije, tj. vrijeme T za koje se količina radioaktivne materije prepolovi (posebice za $(C-14)$).
Treba biti $y(t+T) = \frac{1}{2}y(t)$. Uvrštavanjem se dobije:
$y(0)e^{-k(t+T)} = \frac{1}{2}y(0)e^{-kt}$, tj. $e^{-kt}e^{-kT} = \frac{1}{2}e^{-kt}$, tj. $e^{-kT} = \frac{1}{2}$, tj. $-kT = \ln 1 - \ln 2$, tj.

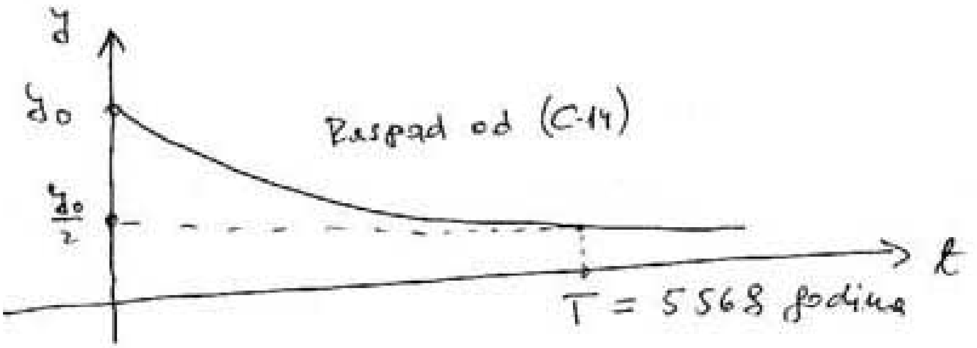
$$T = \frac{\ln 2}{k}.$$

Vidimo da vrijeme poluživota T ne ovisi o t već samo o k (tj. o vrsti materije). Zato je T važna karakteristika radioaktivne materije (sl.3.).



Sl. 3

Za $(C-14)$ je $k = 1.244 \cdot 10^{-4}$ (približno), pa je $T = 5568$ godina (približno, uz uvjet da vrijeme mjerimo u godinama) (sl.4).



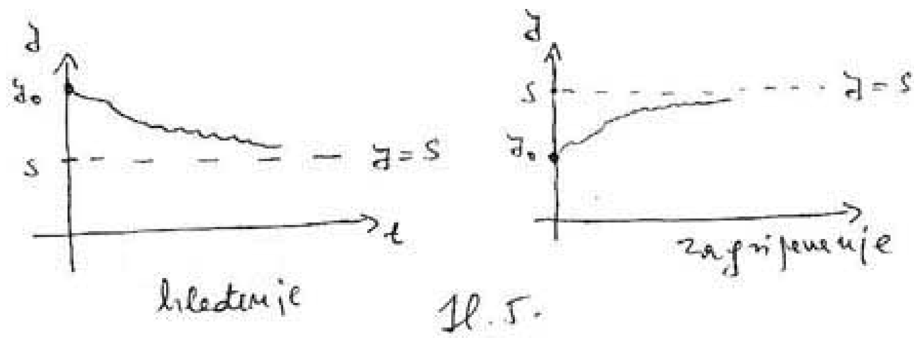
sl. 4

Hladjenje - zagrijavanje tijela u sredini stalne temperature

Neka je:

1. t - vrijeme.
2. S - stalna temperatura sredine.
3. $y(t)$ - temperatura tijela smještena u sredinu.
4. y_0 - početna temperatura tijela.

Problem: Treba opisati mijenjanje temperature tijela ovisno o vremenu.
Intuitivno je jasno da će se tijelo hladiti ako je $y_0 > S$, da će se zagrijavati i približavati temperaturi S ako je $y_0 < S$, te da će zadrzavati stalnu temperaturu ako je $y_0 = S$ (sl.5.).



sl. 5.

Takodjer je intuitivno jasno, a potvrdjuje se pokusom (Newtonov zakon), da je, u svakom trenutku, promjena temperature proporcionalna razlici izmedju temperature tijela i sredine, takodjer da je proporcionalna proteklom vremenu (za male vremenske pomake). Dakle, pokus pokazuje:

$$\Delta y(t) \approx -k[y(t) - S]\Delta t$$

za pozitivnu konstantu k (koja ovisi o materijalu); negativni predznak dolazi od toga što se termperatura tijela smanjuje ako je $y(t) - S > 0$. Odatle dobijamo

diferencijalnu jednadžbu hladjenja - zagrijavanja.

$$\frac{dy}{dt} = -k(y - S)$$

Primjer 3. - opis mijenjanja temperature tijela u sredini stalne temperature.
Treba riješiti Cauchy-ev problem

$$\frac{dy}{dt} = -k(y - S);\ y(0) = y_0$$

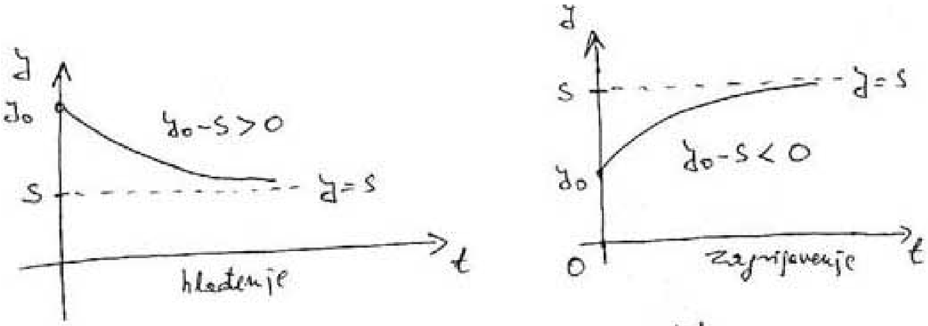
Nakon zamjene: $z = y - S;\ dz = dy$ dolazimo do

$$\frac{dz}{dt} = -kz;\ z(0) = y_0 - S$$

što znamo riješiti (jer je sve kao kod radioaktivnog raspada). Dobijemo: $z(t) = (y_0 - S)e^{-kt}$, tj.

$$y(t) = S + (y_0 - S)e^{-kt}$$

Grafički prikaz je na sl. 6.



Sl. 6 : $y(t) = S + (y_0 - S) \cdot e^{-kt}$

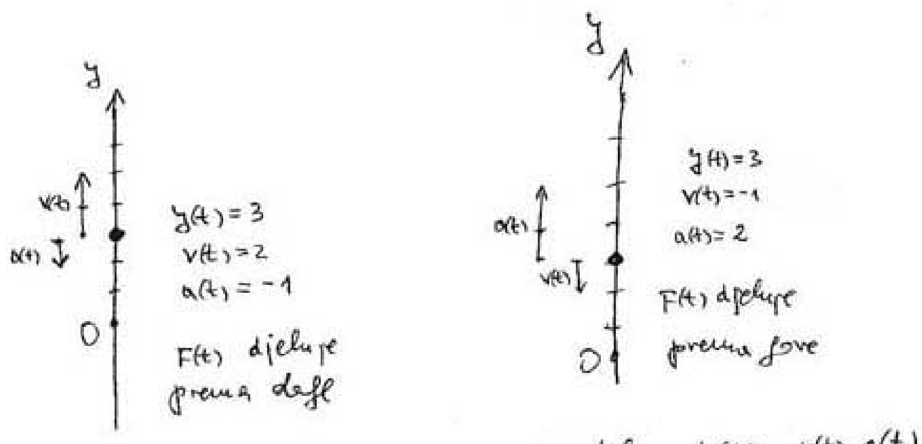
Primjer 4. Tijelo se nalazi u sredini stalne temperature $S = 18°C$ i ima u prvom trenutku mjerenja (za $t = 0$) temperaturu od $35°C$. Nakon sat vremena izmjerena mu je temperatura od $27°C$. Treba odrediti:
(i) konstantu hladjenja.
(ii) temperaturu dva sata vremena prije nultog trenutka.
(iii) temperaturu za dva sata (nakon nultog trenutka).
(iv) vrijeme u kojem će tijelo poprimiti temperaturu od $21°C$.
(v) vrijeme u kojem će tijelo poprimiti temperaturu sredine.

Gibanje po pravcu

Dogovor o brzini, akceleraciji i sili pri gibanju po koordinatnom pravcu

Neka je:
1. $y(t)$ - položaj, tj. koordinata položaja tijela (koje se giba po pravcu) u

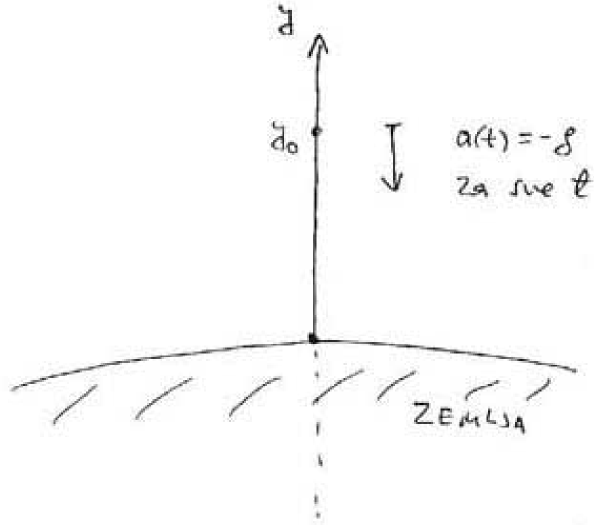
trenutku t.
2. $v(t)$ - brzina tijela u trenutku t.
3. $a(t)$ - akceleracija (ubrzanje) tijela u trenutku t.
4. $F(t)$ - sila koja djeluje na tijelo dok se nalazi u položaju $y(t)$; vrijedi $F(t) = ma(t)$, gdje je m masa tijela.
Tada je:
1. $y(t)$ je realan broj koji označuje položaj, tj. udaljenost od ishodišta koordinatnog sustava na pravcu (to je broj $|y(t)|$) i usmjerenje, tj. ako je $y(t) > 0$ tijelo je na pozitivnom dijelu, a ako je $y(t) < 0$, ono je na negativnom dijelu pravca.
2. $v(t)$ je realan broj, ali ima značenje vektora brzine (kako i treba, jer je brzina vektor); iznos brzine u trenutku t je $|v(t)|$, ako je $v(t) > 0$, onda se u tom trenutku tijelo giba u pozitivnom smjeru, a ako je $v(t) < 0$, onda se u tom trenutku tijelo giba u negativnom smjeru osi y.
3. $a(t)$ je realan broj, ali ima značenje vektora akceleracije (kako i treba, jer je akceleracija vektor); iznos akceleracije u trenutku t je $|a(t)|$; ako je $a(t) > 0$, onda je $F(t) > 0$, pa u tom trenutku sila djeluje u pozitivnom smjeru, a ako je $a(t) < 0$, onda je $F(t) < 0$, pa u tom trenutku sila djeluje u pozitivnom smjeru (sl.7.).



Sl.7. Primjeri mogućih $y(t)$, $v(t)$, $a(t)$

Gibanje po pravcu pri djelovanju konstantne sile
Problem: Treba opisati gibanje na pravcu tijela na koji djeluje konstantna sila. Da bi to učinili treba uvesti (t, y) koordinatni sustav ovako:
Neka je:
1. t - vrijeme (koordinatnu os vremena možemo zamišljati horizontalnom).
2. os y - koordinatni pravac (možemo ga zamišljati vertikalnim - okomitim na vremensku os, i pozitivno usmjerenim *prema gore*)
3. $y(t)$ - položaj u trnutku t (tj. koordinata položaja) tijela koje se giba po koordinatnom pravcu y.
4. y_0 - početni položaj tijela, tj. $y_0 := y(0)$.
5. v_0 - brzina tijela u nultom trenutku, tj. $v_0 := v(0)$.
6. $-g$ - stalna akceleracija, tj. sila je stalna i usmjerena suprotno od usmjerenja

y osi i ima iznos g (to smo napravili tako da nas podsjeća na gibanje pod utjecajem sile teže - vertikalni hitac) (sl.8.).



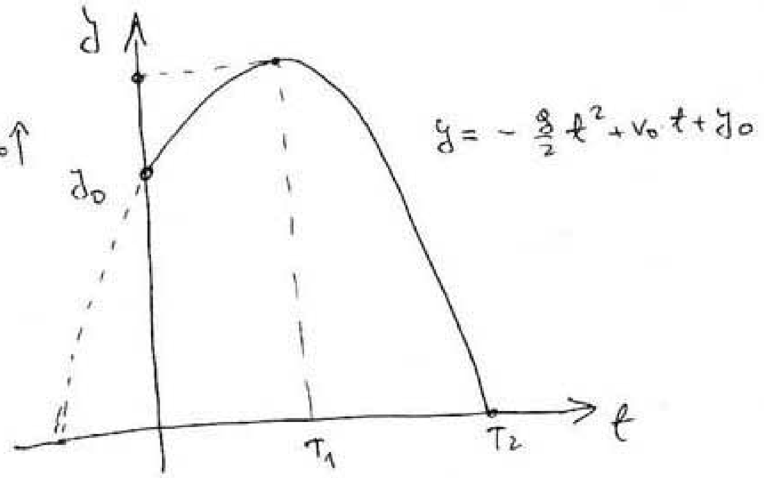
Sl 8. Vertikalni hitac relativno blizu površine Zemlje uz zanemareni otpor zraka i utjecaj drugih sila osim gravitacije.

Rješenje problema - gibanje pod utjecajem stalne sile - vertikalni hitac.

Znademo:
(i) $v(t) = y'(t)$, tj. $v(t) = \frac{dy}{dt}$. Posebno $v(0) = y'(0)$
(ii) $a(t) = v'(t) = (y'(t))' = y''(t)$.
(iii) $a(t) = -g$, za svaki t (jer je sila, pa time i akceleracija, konstantna).
Sad postavljamo Cauchy-ev problem:

$$y'' = -g;\ y(0) = y_0;\ y'(0) = v_0$$

Iz $(y')' = -g$, dobijemo integriranjem
$y'(t) = -gt + C_1$, a odavde, opet integriranjem:
$y(t) = -g\frac{t^2}{2} + C_1 t + C_2$, za neke konstante C_1, C_2.
Sad iz $y'(0) = v_0$, dobijemo $C_1 = v_0$, a iz $y(0) = y_0$ dobijemo $C_2 = y_0$. Konačno imamo:
$y(t) = -\frac{g}{2}t^2 + v_0 t + y_0$, i
$v(t) = -gt + v_0$
To je opis položaja i brzine u svakom trenutku t (ako ne dodje do promjene uvjeta) (sl.9.).



Sl. 9. grafički prikaz gibanja pri vertikalnom hitcu za $y_0 > 0$ i $V_0 > 0$.

Fizikalno tumačenje rješenja. $y(t) = -\frac{g}{2}t^2 + v_0 t + y_0$.
Dio $-\frac{g}{2}t^2$ je doprinos od djelovanja sile; $v_0 t$ je doprinos od početne brzine, y_0 od početnog položaja. Na primjer, ako zamislimo da je riječ o vertikalnom hitcu pod utjecajem gravitacije (koja je blizu površine zemlje konstantna) i ako zanemarimo otpor, onda je:
(i) y_0 visina na kojoj je tijelo bilo u početku (i tu bi ostalo da nije početne brzine i gravitacije).
(ii) $v_0 t$ promjena položaja tijela za vrijeme t, koje se giba stalnom brzinom v_0 (to je pozitivno za $v_0 > 0$).
(iii) $\frac{g}{2}t^2$ je put koji bi tijelo prešlo pri slobodnom padu za vrijeme t (ako prije toga ne udari u zemlju); negativni je predznak jer se za tu vrijednost koordinata položaja smanjila.

V. Pitanja i zadaci

1. Odredite formulu radioaktivnog raspada u terminu vremena poluživota.
Uputa. U formulu stavite $k = \frac{\ln 2}{T}$.
2. Tijelo je bačeno u vis brzinom $v_0 = 3m/s$ s početnog položaja $y_0 = 12m$. Uz pretpostavku da je $g = 9.81m/s^2$ i da nema otpora, odredite:
(i) jednadžbu gibanja tog tijela.
(ii) brzinu $v(t)$ u svakom trenutku.
(iii) maksimalnu visinu i vrijeme kad se postiže.
(iv) vrijeme za koje ce tijelo opet biti na početnoj visini i brzinu u to trenutku (komentirajte).
(v) vrijeme pada tijela na površinu zemlje i brzinu u tom trenutku.
(vi) Odredite vremenske intervale ubrzanog i usporenog gibanja.
Uputa: Za (vi) koristite se **kriterijem** ubrzanog, odnosno usporenog gibanja po pravcu: **gibanje po pravcu je ubrzano u nekom trenutku ako, u tom**

trenutku, brzina i akceleracija imaju isto usmjerenje, a usporeno, ako su usmjerenja suprotna.
Taj se kriterij zasniva na definiciji ubrzanja: **gibanje je ubrzano ako se iznos brzine povećava**.
Uočite, da, iako je ovdje akceleracija stalna (i negativna), tj. $a(t) = -g$ za sve t, postoji i ubrzano i usporeno gibanje.

3. Postavite Cauchy-ev problem vertikalnog hitca, ako je otpor u svakom trenutku proporcionalan i suprotno usmjeren brzini.